CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY

W ROKU SZKOLNYM 2017/2018

MATEMATYKA

POZIOM ROZSZERZONY

FORMUŁA OD 2015

(„NOWA MATURA”)

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

ARKUSZ MMA-R1

MAJ 2018

Zadania zamknięte

Punkt przyznaje się za wskazanie poprawnej odpowiedzi.

Zadanie 1. (0−1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odpowiedź
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych (1.4).	**A**

Zadanie 2. (0−1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną (R1.1). ALBO 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną (R3.9).	**B**

Zadanie 3. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu (R1.2).	**C**

Zadanie 4. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych (R11.1).	**D**

Zadanie 5. (0−2)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych (R11.1). 4. Funkcje. Zdający odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości) (4.2).	**166**

Ogólne zasady oceniania zadań otwartych

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 6. (0−3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej (R11.3).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Rozważmy funkcję kwadratową f określoną wzorem $f(x)=\sqrt{3}x^2-1$.
Współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $P=(x_0, y_0)$ nachylonej do osi Ox pod kątem $30°$ jest równy $\mathrm{tg}30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$ i jest równocześnie wartością pochodnej funkcji f w punkcie x_0.
Wyznaczamy pochodną funkcji f: $f'(x)=2\sqrt{3}x$.
Współrzędna x_0 punktu styczności spełnia więc równanie

$$2\sqrt{3}x_0=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Stąd

$$x_0=\frac{1}{6}.$$

Wartość funkcji f dla argumentu $x_0=\frac{1}{6}$ jest równa

$$f(x_0)=\sqrt{3}\left(\frac{1}{6}\right)^2-1=\frac{\sqrt{3}-36}{36}.$$

Zatem punkt P ma współrzędne: $x_0=\frac{1}{6}$, $y_0=\frac{\sqrt{3}-36}{36}$.

II sposób

Styczna do paraboli nachylona do osi Ox pod kątem $30°$ ma współczynnik kierunkowy równy $\mathrm{tg}30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$, więc jej równanie jest postaci $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+b$.
Punkt P to jedyny punkt wspólny paraboli i tej stycznej, więc układ równań $y=\sqrt{3}x^2-1$ i $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+b$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Tak jest wtedy i tylko wtedy, gdy równanie $\sqrt{3}x^2-1=\frac{\sqrt{3}}{3}x+b$, czyli $\sqrt{3}x^2-\frac{\sqrt{3}}{3}x-1-b=0$ ma jedno rozwiązanie, którym jest

$$x_0=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{6}.$$

Jest to pierwsza współrzędna punktu P. Druga współrzędna tego punktu jest więc równa
$y_0 = \sqrt{3}\left(\frac{1}{6}\right)^2 - 1 = \frac{\sqrt{3}-36}{36}$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający
- zapisze, że współczynnik kierunkowy stycznej jest równy $\mathrm{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ lub równanie stycznej: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$

albo
- wyznaczy pochodną funkcji *f*: $f'(x) = 2\sqrt{3}x$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.

Zdający
- zapisze równanie: $2\sqrt{3}x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

albo
- zapisze równanie: $\sqrt{3}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1 - b = 0$ i stwierdzi, że ma ono dokładnie jedno rozwiązanie, np. zapisze $\Delta = 0$.

Rozwiązanie pełne .... 3 p.

Zdający wyznaczy współrzędne punktu P: $x_0 = \frac{1}{6}$, $y_0 = \frac{\sqrt{3}-36}{36}$.

Uwagi
1. Jeżeli zdający błędnie wyznaczy pochodną funkcji, ale poprawnie wyznaczy współczynnik kierunkowy stycznej, to jeśli nawet konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający przyjmie, że współczynnik kierunkowy stycznej jest równy $\mathrm{tg}30^\circ$, ale przypisuje tej wielkości błędną wartość liczbową, np. zapisze $a = \sqrt{3}$ lub $a = \mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ itp., i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, bez żadnego innego błędu, to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający błędnie zinterpretuje współczynnik kierunkowy stycznej do paraboli, np. zapisze $a = \frac{1}{2}$ lub $a = \sin\alpha$ itp., i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca to otrzymuje **1 punkt**.
4. Jeżeli zdający błędnie przyjmie, że kąt nachylenia stycznej do osi *Ox* jest równy 150°, i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca lub rozpatruje dwie styczne o kątach nachylenia 30° i 150° do osi *Ox*, to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania zadania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **2 punkty**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozwiązania na żadnym etapie.

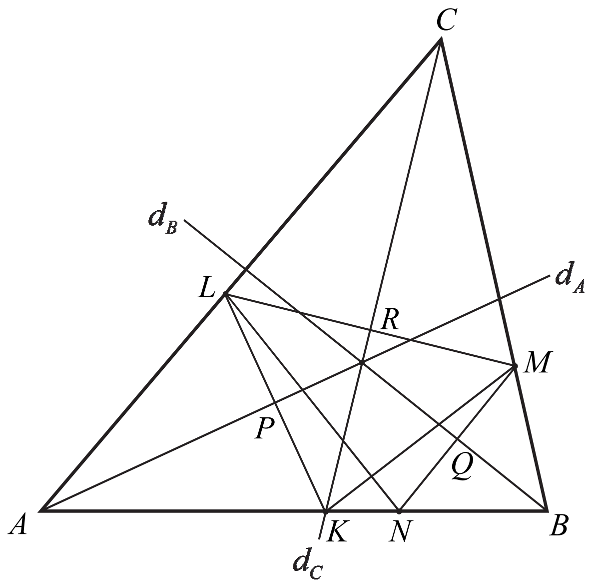
Zadanie 7. (0−3)

V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu (R7.1).

Przykładowe rozwiązania

I sposób – bilans kątów

Oznaczmy miary kątów trójkąta *ABC* odpowiednio przez $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$, a punkt wspólny dwusiecznej d_A i odcinka *KL* przez *P*, dwusiecznej d_C i odcinka *LM* przez *R* oraz dwusiecznej d_B i odcinka *MN* przez *Q*.



Wówczas $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$, stąd $\alpha + \beta + \gamma = 90°$. Wtedy

$|\sphericalangle KAP| = \alpha$, zatem $|\sphericalangle AKP| = 90° - \alpha$ i $|\sphericalangle LKN| = 180° - (90° - \alpha) = 90° + \alpha$

oraz

$|\sphericalangle CMR| = 90° - \gamma$ oraz $|\sphericalangle BMQ| = 90° - \beta$,

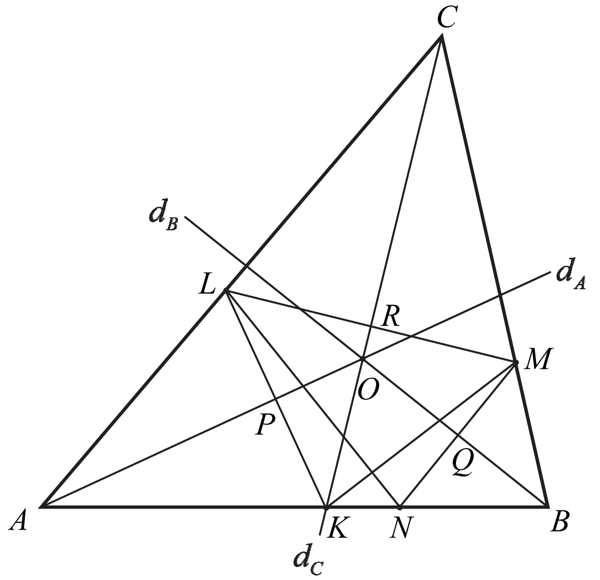
zatem $|\sphericalangle LMN| = 180° - (90° - \gamma) - (90° - \beta) = \beta + \gamma$.

Suma kątów *LKN* i *LMN* jest więc równa

$$|\sphericalangle LKN| + |\sphericalangle LMN| = (90° + \alpha) + (\beta + \gamma) = \alpha + \beta + \gamma + 90° = 180°.$$

To oznacza, że na czworokącie *KNML* można opisać okrąg.

II sposób – symetralne

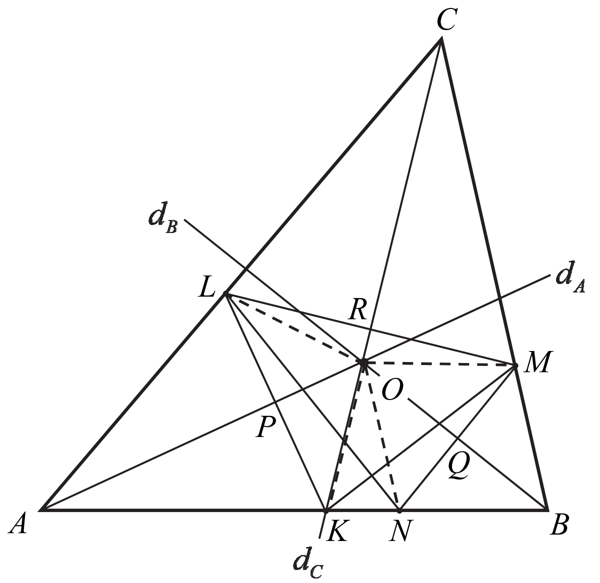


Rozważmy trójkąt *KLM*. Z definicji symetrii osiowej wynika, że dwusieczna d_A jest symetralną boku *KL*. Analogicznie dwusieczna d_C jest symetralną boku *LM*. Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie – oznaczmy go przez *O*. Czyli punkt wspólny dwusiecznych d_A i d_C (symetralnych boków trójkąta *KLM*) jest środkiem okręgu, którego promieniem jest w szczególności odcinek *OL*.

Podobnie rozważmy trójkąt LMN. Z definicji symetrii osiowej wynika, że dwusieczna d_C jest symetralną boku LM. Analogicznie dwusieczna d_B jest symetralną boku MN. Punkt wspólny tych dwusiecznych (symetralnych) jest tym samym punktem, o którym była mowa wyżej i jest oczywiście środkiem okręgu opisanego na trójkącie *LMN*. Zatem musi to być ten sam okrąg. Wszystkie wierzchołki czworokąta *KNML* leżą na tym okręgu. To kończy dowód.

III sposób – równość promieni

Oznaczmy przez O punkt przecięcia się dwusiecznych kątów trójkąta ABC, punkt wspólny dwusiecznej d_A i odcinka KL przez P, dwusiecznej d_C i odcinka LM przez R oraz dwusiecznej d_B i odcinka MN przez Q.



Z definicji symetrii osiowej i z treści zadania wynika, że $|KP| = |LP|$ oraz $KL \perp AO$. Oznacza to, że trójkąty OPK i OPL są prostokątne, mają wspólną przyprostokątną OP oraz pozostałe przyprostokątne są równej długości. Są to więc trójkąty przystające (na mocy cechy *bkb* przystawania trójkątów). Stąd wynika, że $|OL| = |OK|$. Analogicznie trójkąty ORL i ORM są przystające oraz trójkąty OQM i OQN są przystające, a w konsekwencji $|OL| = |OM|$ oraz $|OM| = |ON|$. Zatem punkt O jest więc równooddalony od wszystkich wierzchołków czworokąta $KNML$, a to oznacza, że na tym czworokącie można opisać okrąg.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 p.

Zdający

- wyznaczy miarę jednego z kątów czworokąta $KNML$ w zależności od miar kątów trójkąta ABC, np.: $|\sphericalangle LKN| = 90° + \alpha$

albo

- zapisze, że prosta zawierająca dwusieczną kąta trójkąta ABC jest symetralną jednego z odcinków KL, LM, MN

albo

- zapisze jedną lub dwie równości spośród: $|OL| = |OK|$, $|OL| = |OM|$, $|OM| = |ON|$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 p.**
Zdający

- wyznaczy miary dwóch przeciwległych kątów czworokąta *KNML* w zależności od miar kątów trójkąta *ABC*, np.: $|\sphericalangle LKN| = 90° + \alpha$ i $|\sphericalangle LMN| = \beta + \gamma$

albo

- zapisze, że punkt przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta *ABC* jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie *KLM* lub na trójkącie *LMN*, lub że jest punktem przecięcia symetralnych trzech boków czworokąta *KNML*

albo

- zapisze i uzasadni jedną lub dwie równości spośród: $|OL| = |OK|$, $|OL| = |OM|$, $|OM| = |ON|$

  Uwaga
  Jeżeli zdający zapisze wszystkie równości $|OL| = |OK|$, $|OL| = |OM|$, $|OM| = |ON|$ i stąd wyciągnie wniosek, że punkt *O* jest środkiem okręgu opisanego na czworokącie *KNML*, ale nie uzasadni żadnej z tych równości (lub uzasadnienie nie będzie pełne), to otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie pełne .... **3 p.**

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwagi

1. Jeżeli zdający przeprowadza dowód z wykorzystaniem bilansu kątów i korzysta z równości kątów w trójkątach równoramiennych, to może otrzymać **3 punkty** także w przypadku, gdy bez stosownego komentarza korzysta z faktu, że trójkąty są równoramienne.
2. Jeżeli zdający
   - uzależni wszystkie kąty trójkąta *ABC* oraz jeden z kątów czworokąta *KNML*

   albo
   - uzależni jeden z kątów *LKN*, *KNM* i jeden z kątów *KLM*, *NML*

   od kątów $\alpha = \sphericalangle AKL = \sphericalangle ALK$, $\beta = \sphericalangle BML = \sphericalangle BLM$ i $\gamma = \sphericalangle CLM = \sphericalangle CML$, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający
   - wyznaczy 2 przeciwległe kąty czworokąta *KNML* w zależności od α, β, γ i wykaże, że $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

   albo
   - wyznaczy wszystkie kąty czworokąta *KNML* i obliczy sumę dwóch przeciwległych kątów czworokąta *KNML*,

   to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 8. (0−3)

V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający rozkłada wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias (R2.3). SP2. Działania na liczbach naturalnych. Zdający rozpoznaje liczby naturalne podzielne przez 2, 3 (SP2.3).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Zauważmy, że $k^3m - km^3 = km(k^2 - m^2) = km(k+m)(k-m)$.
Rozwiązanie zadania składa się z dwóch etapów:

- uzasadnienie podzielności przez 2;
- uzasadnienie podzielności przez 3.

Podzielność przez 2.
Gdy którakolwiek z liczb k, m jest parzysta, to iloczyn $km(k^2 - m^2)$ jest parzysty, a gdy obie liczby k, m są nieparzyste, to ich suma $k+m$ jest liczbą parzystą, więc iloczyn $km(k+m)(k-m)$ jest podzielny przez 2.

Podzielność przez 3. (I sposób)
Dowód przeprowadzimy w czterech rozłącznych sytuacjach: A, B, C, D.

A. Którakolwiek z liczb k, m jest podzielna przez 3
Wtedy iloczyn $km(k^2 - m^2)$ jest podzielny przez 3.

B. Obie liczby k, m przy dzieleniu przez 3 dają resztę 1
Wtedy liczba $k-m$ jest podzielna przez 3, więc iloczyn $km(k+m)(k-m)$ jest podzielny przez 3.

C. Obie liczby k, m przy dzieleniu przez 3 dają resztę 2
Wtedy liczba $k-m$ jest podzielna przez 3, więc iloczyn $km(k+m)(k-m)$ jest podzielny przez 3.

D. Jedna z liczb k, m przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, a druga przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2
Wtedy liczba $k+m$ jest podzielna przez 3, więc iloczyn $km(k+m)(k-m)$ jest podzielny przez 3.

Podzielność przez 3. (II sposób)
Dowód przeprowadzimy w dwóch rozłącznych sytuacjach: E, F.

E. Którakolwiek z liczb k, m jest podzielna przez 3.
Wtedy iloczyn $km(k^2 - m^2)$ jest podzielny przez 3.

F. Żadna z liczb k, m nie jest podzielna przez 3.
Wtedy kwadrat każdej z nich przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, więc różnica $k^2 - m^2$ jest podzielna przez 3.

Wykazaliśmy zatem, że liczba $k^3m - km^3$ jest podzielna przez 2 i przez 3, więc jest podzielna przez $2 \cdot 3$, czyli przez 6. To kończy dowód.

II sposób

Zauważmy, że

$$k^3m-km^3=km\left(k^2-1+1-m^2\right)=km\left(k^2-1\right)-km\left(m^2-1\right)=km\left(k-1\right)\left(k+1\right)-km\left(m-1\right)\left(m+1\right)$$

Iloczyn $k\left(k-1\right)\left(k+1\right)$ to iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych, więc dokładnie jedna z nich jest podzielna przez 3 i co najmniej jedna jest podzielna przez 2, więc iloczyn jest podzielny przez 2 i przez 3, a więc jest podzielny przez 6. Analogicznie iloczyn $m\left(m-1\right)\left(m+1\right)$ jest podzielny przez 6. Różnica dwóch liczb podzielnych przez 6 jest podzielna przez 6. To kończy dowód.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
jeśli

- uzasadni podzielność przez 2

albo

- uzasadni podzielność przez 3 w dwóch przypadkach spośród A, B, C, D,

albo

- uzasadni podzielność przez 3 w przypadku F.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
jeśli

- uzasadni podzielność przez 2 i uzasadni podzielność przez 3 w dwóch przypadkach spośród A, B, C, D

albo

- uzasadni podzielność przez 2 i uzasadni podzielność przez 3 w przypadku F,

albo

- uzasadni podzielność przez 3,

albo

- zapisze liczbę k^3m-km^3 w postaci $km\left(k-1\right)\left(k+1\right)-km\left(m-1\right)\left(m+1\right)$.

Zdający otrzymuje .... 3 p.
przeprowadzi pełne rozumowanie uzasadniające podzielność przez 6.

Uwagi

1. Akceptujemy sytuację, w której zdający stwierdza bez uzasadnienia, że iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez 6 oraz różnica liczb podzielnych przez 6 jest podzielna przez 6.
2. Jeżeli zdający rozważa reszty z dzielenia liczb k i m przez 6 i udowodni podzielność przez 6 w jednym z poniższych 5 przypadków:
   - dokładnie jedna z liczb k, m jest podzielna przez 6 lub obie liczby k, m dają przy dzieleniu przez 6 tę samą resztę;
   - żadna z liczb k, m nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby k^3m-km^3 można wnioskować na podstawie iloczynu liczb k, m;
   - żadna z liczb k, m nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby k^3m-km^3 można wnioskować na podstawie sumy liczb k, m;
   - żadna z liczb k, m nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby k^3m-km^3 można wnioskować na podstawie sumy i iloczynu liczb k, m;
   - żadna z liczb k, m nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby k^3m-km^3 można wnioskować na podstawie różnicy i iloczynu liczb k, m,

   to otrzymuje **1 punkt**.

3. Jeżeli zdający rozważa reszty z dzielenia liczb k i m przez 6 i udowodni podzielność przez 6 w trzech z poniższych 5 przypadków:
   - dokładnie jedna z liczb k, m jest podzielna przez 6 lub obie liczby k, m dają przy dzieleniu przez 6 tę samą resztę;
   - żadna z liczb k, m nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby $k^3m - km^3$ można wnioskować na podstawie iloczynu liczb k, m;
   - żadna z liczb k, m nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby $k^3m - km^3$ można wnioskować na podstawie sumy liczb k, m;
   - żadna z liczb k, m nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby $k^3m - km^3$ można wnioskować na podstawie sumy i iloczynu liczb k, m;
   - żadna z liczb k, m nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby $k^3m - km^3$ można wnioskować na podstawie różnicy i iloczynu liczb k, m,

   to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 9. (0−4)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych (R10.1). Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Zdarzeniami elementarnymi są permutacje (bez powtórzeń) zbioru ośmioelementowego $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$.

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 8!$.

Niech A będzie zdarzeniem, polegającym na tym, że żadne dwie liczby parzyste nie są sąsiednimi wyrazami utworzonego ciągu. Ustalmy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A.

I metoda

W zbiorze Z jest 5 liczb nieparzystych, więc możemy je ustawić w ciąg na $5!$ sposobów. Otrzymamy wtedy sytuację:

_(1)_ n _(2)_ n _(3)_ n _(4)_ n _(5)_ n _(6)_

Pierwszą z pozostałych liczb (parzystych) zbioru Z możemy ustawić na jednym z sześciu miejsc _(1)_ – _(6)_, drugą na jednym z pozostałych pięciu, a trzecią na jednym z pozostałych czterech.

Zatem $|A| = 5! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

II metoda
W zbiorze Z jest 5 liczb nieparzystych, więc możemy je ustawić w ciąg na $5!$ sposobów.
Otrzymamy wtedy sytuację:
_(1)_ n _(2)_ n _(3)_ n _(4)_ n _(5)_ n _(6)_
Trzy pozostałe liczby (parzyste) ze zbioru Z musimy ustawić na wybranych trzech miejscach spośród sześciu miejsc _(1)_ – _(6)_. Te trzy miejsca możemy wybrać na $\binom{6}{3}$ sposobów. Na tych trzech ustalonych miejscach możemy trzy liczby parzyste ze zbioru Z ustawić na $3!$ sposobów.
Zatem $|A| = 5! \cdot \binom{6}{3} \cdot 3!$.

III metoda (ustalenie kolejności parzystych, a następnie ustalenie pozycji parzystych)
W zbiorze Z mamy 3 liczby parzyste: 2, 4, 6. Możemy ustawić je w kolejności na $3! = 6$ sposobów. Jedną z takich możliwości jest kolejność: 2, 4, 6.
Wypiszmy wszystkie przypadki ustawienia tych trzech liczb w kolejności 2, 4, 6 w ciągu 8-wyrazowym:
(a) 2 na pierwszym miejscu
2 – 4 – 6 – – –, 2 – 4 – – 6 – –, 2 – 4 – – – 6 –, 2 – 4 – – – – 6, 2 – – 4 – 6 – –,
2 – – 4 – – 6 –, 2 – – 4 – – – 6, 2 – – – 4 – 6 –, 2 – – – 4 – – 6, 2 – – – – 4 – 6,
(b) 2 na drugim miejscu
– 2 – 4 – 6 – –, – 2 – 4 – – 6 –, – 2 – 4 – – – 6, – 2 – – 4 – 6 –, – 2 – – 4 – – 6,
– 2 – – – 4 – 6,
(c) 2 na trzecim miejscu
– – 2 – 4 – 6 –, – – 2 – 4 – – 6, – – 2 – – 4 – 6,
(d) 2 na czwartym miejscu
– – – 2 – 4 – 6.
Łącznie mamy 20 przypadków ustawienia w ciągu 8-wyrazowym trzech liczb parzystych – 2, 4, 6 – w kolejności 2, 4, 6.
Ponieważ mamy 6 możliwości ustalenia kolejności dla trzech liczb 2, 4, 6, więc liczby parzyste ze zbioru Z możemy ustawić na $6 \cdot 20$ sposobów.
Do ustawionych liczb parzystych na wolne miejsca ustawiamy liczby nieparzyste, a możemy to zrobić na 5! sposobów.
Zatem $|A| = 6 \cdot 20 \cdot 5!$.

IV metoda (ustalenie pozycji parzystych)
Wypiszmy wszystkie przypadki wyboru trzech miejsc, spośród ośmiu, dla liczb parzystych, z uwzględnieniem warunku, że żadne dwie parzyste nie sąsiadują ze sobą.
(a) pierwsza liczba parzysta na pierwszym miejscu
p – p – p – – –, p – p – – p – –, p – p – – – p –, p – p – – – – p, p – – p – p – –,
p – – p – – p –, p – – p – – – p, p – – – p – p –, p – – – p – – p, p – – – – p – p,
(b) pierwsza liczba parzysta na drugim miejscu
– p – p – p – –, – p – p – – p –, – p – p – – – p, – p – – p – p –, – p – – p – – p,
– p – – – p – p,
(c) pierwsza liczba parzysta na trzecim miejscu
– – p – p – p –, – – p – p – – p, – – p – – p – p,
(d) pierwsza liczba parzysta na czwartym miejscu
– – – p – p – p.
Łącznie mamy 20 przypadków ustalenia w ciągu 8-wyrazowym pozycji liczb parzystych.
Zatem $|A| = 20 \cdot 3! \cdot 5!$.

Uwaga! Te same przypadki wyboru uzyskamy, wypisując wszystkie ustawienia liczb parzystych i nieparzystych przy założeniu, że rozpoczynamy najpierw od liczby parzystej (10 przypadków), a następnie od nieparzystej (kolejne 10 przypadków). Ponadto należy pamiętać, że przedstawione tu przypadki ustawień liczb parzystych (a tym samym i nieparzystych) mogą być przedstawione jako gałęzie drzewa probabilistycznego z 20 gałęziami.

V metoda (przerwy między parzystymi)
Trzy liczby parzyste musimy rozdzielić pięcioma nieparzystymi, przy czym nieparzyste możemy umieszczać także przed wszystkimi parzystymi lub po wszystkich parzystych. Mamy zatem 4 usytuowania dla liczb nieparzystych.
Wypiszmy najpierw przypadki uwzględniające liczbę pozycji dla liczb nieparzystych w poszczególnych usytuowaniach (cyfra oznacza liczbę miejsc zajętych przez liczby nieparzyste, litera p oznacza liczbę parzystą).
0-p-1-p-1-p-3, 0-p-1-p-2-p-2, 0-p-1-p-3-p-1, 0-p-1-p-4-p-0, 0-p-2-p-1-p-2, 0-p-2-p-2-p-1, 0-p-2-p-3-p-0, 0-p-3-p-1-p-1, 0-p-3-p-2-p-0, 0-p-4-p-1-p-0, 1-p-1-p-1-p-1, 1-p-1-p-2-p-1, 1-p-1-p-3-p-0, 1-p-2-p-1-p-1, 1-p-2-p-2-p-0, 1-p-3-p-1-p-0, 2-p-1-p-1-p-1, 2-p-1-p-2-p-0, 2-p-2-p-1-p-0, 3-p-1-p-1-p-0
Łącznie mamy 20 takich przypadków.
Zatem $|A| = 20 \cdot 3! \cdot 5!$.
Obliczamy prawdopodobieństwo:
$$P(A) = \frac{20 \cdot 3! \cdot 5!}{8!} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}.$$

<u>II sposób</u> (zdarzenie przeciwne)

Zdarzeniami elementarnymi są permutacje (bez powtórzeń) zbioru ośmioelementowego $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$.

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 8!$

Niech A będzie zdarzeniem, polegającym na tym, że żadne dwie liczby parzyste nie są sąsiednimi wyrazami utworzonego ciągu.
Zdarzeniem przeciwnym A' jest otrzymanie w wyniku permutacji zbioru Z ciągu, w którym liczby parzyste są sąsiednimi wyrazami ciągu, tzn.
I: wszystkie trzy liczby parzyste będą kolejnymi wyrazami ciągu
albo
II. dwie liczby parzyste będą kolejnymi wyrazami ciągu, a trzecia liczba parzysta nie będzie sąsiadować z żadną z nich.
W sytuacji I miejsca dla liczb parzystych wybieramy na 6 sposobów, ustawiamy na tych miejscach liczby parzyste na 3! sposobów, a pozostałe liczby ustawiamy na pięciu miejscach na $5!$ sposobów.
W sytuacji II. dla sąsiadujących liczb parzystych wybieramy miejsca na 7 sposobów: m_1 i m_2, m_2 i m_3, m_3 i m_4, m_4 i m_5, m_5 i m_6, m_6 i m_7, m_7 i m_8.
Miejsce dla trzeciej parzystej liczby możemy wybrać: na 5 sposobów wtedy, gdy parzyste liczby sąsiadują na miejscach m_1 i m_2 albo na miejscach m_7 i m_8 oraz na 4 sposoby w każdej z pozostałych możliwości.
Liczby parzyste możemy rozstawić na wybranych miejscach na 3! sposobów, a pozostałe liczby ustawiamy na pięciu miejscach na $5!$ sposobów.
Wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A' jest:
$6 \cdot 3! \cdot 5! + 2 \cdot 5 \cdot 3! \cdot 5! + 5 \cdot 4 \cdot 3! \cdot 5!$.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A:

$$P(A)=1-P(A')=1-\frac{36\cdot 3!\cdot 5!}{8!}=1-\frac{36\cdot 6}{6\cdot 7\cdot 8}=1-\frac{36}{56}=\frac{20}{56}=\frac{5}{14}.$$

Uwaga! Zdający może wypisywać przypadki, w których wystąpią zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A', stosując metody analogiczne do metod III, IV, V z I sposobu rozwiązania, i uwzględnić 36 rozłącznych przypadków.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający

- zapisze $|\Omega|=8!$

albo

- wypisze przynajmniej 11 różnych przypadków spośród 20, gdy rozpatruje zdarzenie A

albo

- wypisze przynajmniej 19 różnych przypadków spośród 36, gdy rozpatruje zdarzenie A',

albo

- zapisze, że jest $\binom{6}{3}$ lub $6\cdot 5\cdot 4$ przypadków, gdy rozpatruje zdarzenie A (lub $6+2\cdot 5+5\cdot 4$ przypadków, gdy rozpatruje zdarzenie A'),

albo

- zapisze iloczyn $3!\cdot 5!$ lub w inny sposób zaznaczy uwzględnienie iloczynu $3!\cdot 5!$, wynikającego z permutacji liczb parzystych i liczb nieparzystych na wybranych dla nich miejscach,

albo

- narysuje drzewo z wyróżnionymi co najmniej 11 różnymi istotnymi gałęziami odpowiadającymi zdarzeniu A (albo z wyróżnionymi co najmniej 19 różnymi istotnymi gałęziami odpowiadającymi zdarzeniu A'),

albo

- narysuje niepełne drzewo (może wystąpić brak istotnych gałęzi odpowiadających zdarzeniu A lub A'), ale na wszystkich odcinkach co najmniej jednej gałęzi zapisze prawdopodobieństwa, przy czym gałąź ta musi uwzględniać jeden z przypadków: wylosowano 3 parzyste liczby lub wylosowano 7 liczb

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający

- zapisze $|\Omega|=8!$ i wypisze przynajmniej 11 różnych przypadków spośród 20, gdy rozpatruje zdarzenie A,

albo

- zapisze $|\Omega|=8!$ i wypisze przynajmniej 19 różnych przypadków spośród 36, gdy rozpatruje zdarzenie A',

albo

- zapisze $|\Omega|=8!$ i zapisze, że jest $\binom{6}{3}$ lub $6\cdot 5\cdot 4$ przypadków, gdy rozpatruje zdarzenie A (lub $6+2\cdot 5+5\cdot 4$ przypadków, gdy rozpatruje zdarzenie A'), albo

- zapisze $|A| = \binom{6}{3} \cdot 3! \cdot 5!$ lub $|A| = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5!$ lub $|A| = 20 \cdot 3! \cdot 5!$ lub

  $|A'| = (6 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 4) \cdot 3! \cdot 5!$ lub $|A'| = 36 \cdot 3! \cdot 5!$,

albo

- narysuje drzewo z wyróżnionymi co najmniej 11 różnymi istotnymi gałęziami odpowiadającymi zdarzeniu A (albo z wyróżnionymi co najmniej 19 różnymi istotnymi gałęziami odpowiadającymi zdarzeniu A') i na wszystkich odcinkach co najmniej jednej gałęzi zapisze prawdopodobieństwa, przy czym gałąź ta musi uwzględniać jeden z przypadków: wylosowano 3 parzyste liczby lub wylosowano 7 liczb

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający

- zapisze $|\Omega| = 8!$ i zapisze $|A| = \binom{6}{3} \cdot 3! \cdot 5!$ lub $|A| = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5!$ lub $|A| = 20 \cdot 3! \cdot 5!$

  lub $|A'| = (6 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 4) \cdot 3! \cdot 5!$ lub $|A'| = 36 \cdot 3! \cdot 5!$

albo

- zapisze prawdopodobieństwo zdarzenia A (albo A') zgodnie z „metodą drzewkową”.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.
Zdający obliczy prawdopodobieństwo: $P(A) = \frac{5}{14}$.

Uwagi

1. Możemy też rozpatrywać model probabilistyczny, w którym zdarzeniem elementarnym jest 3 elementowy podzbiór zbioru 8 elementowego (nie uwzględniamy wówczas kolejności ustawienia liczb nieparzystych ani kolejności ustawienia liczb parzystych, a jedynie pozycje zajmowane przez te liczby). Wtedy $|\Omega| = \binom{8}{3} = 56$, $|A| = \binom{6}{3} = 20$, $P(A) = \frac{5}{14}$.
2. Jeżeli zdający błędnie założy, że podany w treści zadania ośmioelementowy zbiór Z zawiera 4 liczby parzyste i 4 liczby nieparzyste (np. założy, że zbiór Z zawiera liczbę 8 zamiast 9) i rozwiąże zadanie do końca, otrzymując $P(A) = \frac{5 \cdot 4! \cdot 4!}{8!} = \frac{1}{14}$, to otrzymuje **2 punkty**. Zdający otrzymuje w tej sytuacji **1 punkt** tylko za zapisanie $|\Omega| = 8!$.
3. Jeżeli zdający błędnie założy, że podany w treści zadania zbiór Z jest 9-elementowy (i zawiera 4 liczby parzyste i 5 liczby nieparzystych) i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.
4. Jeżeli zdający zapisze $|\Omega|=8!$ oraz rozpatrując zdarzenie A' rozważy trzy sytuacje:
   I. wszystkie trzy liczby parzyste są kolejnymi wyrazami ciągu;
   II. dwie liczby parzyste są dwoma skrajnymi (pierwszym i drugim lub siódmym i ósmym) wyrazami ciągu, a trzecia liczba parzysta nie sąsiaduje bezpośrednio z żadną z nich;
   III. dwie liczby parzyste są dwoma kolejnymi, ale nie skrajnymi wyrazami ciągu, a trzecia parzysta nie sąsiaduje bezpośrednio z żadną z nich

   oraz zapisze sposób zliczania tych ciągów w każdej z tych trzech sytuacji, uwzględniający permutacje liczb parzystych i liczb nieparzystych i jednoczenie gwarantujący to, że żaden ciąg nie zostanie policzony wielokrotnie;
   a ponadto nie ustali poprawnej liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A', to otrzymuje **2 punkty**.

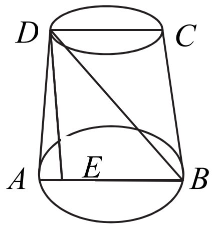
5. Jeżeli zdający rozważa zdarzenie A i wypisuje przynajmniej 12 przypadków, ale jeden z nich zapisuje dwukrotnie, to otrzymuje przynajmniej **1 punkt**. Dotyczy to także sytuacji wypisania 21 przypadków.

Zadanie 10. (0−4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (9.3). 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą (3.4).

Przykładowe rozwiązanie

Przekrojem osiowym stożka jest trapez równoramienny *ABCD*. Niech *DE* oznacza wysokość stożka opuszczoną z punktu *D*.



Po podstawieniu danych do wzoru na objętość otrzymujemy równanie kwadratowe

$$\frac{1}{3}\pi\cdot 10\cdot\left(6^2+6R+R^2\right)=840\pi .$$

Stąd

$$R^2+6R-216=0 .$$

Rozwiązując je, otrzymujemy

$$\Delta=36+4\cdot 216=900,\ \sqrt{\Delta}=30 ,$$

$$R=\frac{-6-30}{2}=-18<0 \text{ lub } R=\frac{-6+30}{2}=12 .$$

Przekrojem osiowym tego stożka jest trapez równoramienny o podstawach długości 24 i 12 oraz wysokości 10. Długość odcinka *EB* jest równa

$$|EB|=R+r=12+6=18 .$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *BDE* otrzymujemy

$$|BD|=\sqrt{10^2+18^2}=\sqrt{424}=2\sqrt{106} .$$

Zatem $\cos|\sphericalangle DBE|=\frac{18}{2\sqrt{106}}=\frac{9}{\sqrt{106}}$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający wyznaczy promień R większej podstawy: $R=12$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający wyznaczy promień R większej podstawy: $R = 12$ i długość odcinka EB: $|EB| = 18$, i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający obliczy

- długość przekątnej trapezu $|BD| = 2\sqrt{106}$

albo

- obliczy tangens kąta DBE: $\operatorname{tg}|\sphericalangle DBE| = \frac{5}{9}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający obliczy $\cos|\sphericalangle DBE| = \frac{9}{\sqrt{106}}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający zapisze cosinus kąta nachylenia przekątnej przekroju osiowego tego stożka ściętego do jednej z jego podstaw w zależności od R, r, H i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający popełni błąd merytoryczny przy zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa, pisząc np.: $|EB|^2 + |BD|^2 = |ED|^2$, albo popełni błąd merytoryczny przez zastosowanie nieistniejącego wzoru "pierwiastek sumy = suma pierwiastków", to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający błędnie przyjmie, że wysokością stożka jest odcinek AD, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**, o ile poprawnie obliczy R.
4. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania zadania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **3 punkty**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozwiązania na żadnym etapie.
5. Jeżeli zdający obliczy długość R oraz długość ramienia trapezu, to może otrzymać **2 punkty**. Jeżeli zdający obliczy długość R oraz długość ramienia trapezu, a ponadto obliczy długość BD i zapisze twierdzenie cosinusów, to może otrzymać **3 punkty**.
6. Jeżeli zdający błędnie przyjmuje, że średnica górnej podstawy stożka ściętego ma długość 6, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
7. Jeżeli zdający błędnie przyjmuje, że długość rzutu prostokątnego ramienia trapezu na dłuższą podstawę to różnica średnic dolnej i górnej podstawy zamiast połowy tej różnicy i nie jest to błąd wynikający z rachunków, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Zadanie 11. (0−4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów (R6.5). Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne (R6.6).

Przykładowe rozwiązanie

Przekształcamy równanie w sposób równoważny

$$\sin 6x + \cos 3x = 2\sin 3x + 1,$$

$$2\sin 3x\cos 3x + \cos 3x = 2\sin 3x + 1,$$

$$\cos 3x\left(2\sin 3x + 1\right) = 2\sin 3x + 1,$$

$$\left(2\sin 3x + 1\right)\left(\cos 3x - 1\right) = 0,$$

$$\sin 3x = -\tfrac{1}{2} \text{ lub } \cos 3x = 1.$$

Stąd $3x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ lub $3x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$ lub $3x = 2k\pi$, k – liczba całkowita.

Zatem $x = \frac{7\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ lub $x = \frac{11\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ lub $x = \frac{2k\pi}{3}$.

W przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ mamy następujące rozwiązania równania: $x = \frac{7\pi}{18}$, $x = \frac{11\pi}{18}$, $x = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający zastosuje wzór na sinus kąta podwojonego i zapisze równanie w postaci $2\sin 3x\cos 3x + \cos 3x = 2\sin 3x + 1$, i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający zapisze dwa równania $\sin 3x = -\frac{1}{2}$, $\cos 3x = 1$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający

- zapisze wszystkie rozwiązania równań $\sin 3x = -\frac{1}{2}$ oraz $\cos 3x = 1$ w zbiorze liczb rzeczywistych $x = \frac{7\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ lub $x = \frac{11\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ lub $x = \frac{2k\pi}{3}$

albo

- zapisze dwa równania $\sin 3x = -\frac{1}{2}$ oraz $\cos 3x = 1$ i jedno z nich rozwiąże w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... **4 p.**

Zdający zapisze wszystkie rozwiązania równania w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$: $x = \frac{7\pi}{18}$, $x = \frac{11\pi}{18}$, $x = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający poprawnie stosuje wzór na sinus kąta podwojonego, zapisze tylko jedno z równań $\cos 3x = 1$, $\sin 3x = -\frac{1}{2}$, to otrzymuje

   1 punkt, jeśli rozwiąże to równanie w **R**;

   2 punkty, jeśli rozwiąże to równanie w $\langle 0, \pi \rangle$.

2. Jeżeli zdający poprawnie stosuje wzór na sinus kąta podwojonego i poprawnie zapisze równanie równoważne w postaci, w której z jednej strony występuje iloczyn, a z drugiej zero, ale w wyniku błędów zapisuje jedno równanie lub dwa równania z niewłaściwym znakiem przy stałej, to otrzymuje:

   3 punkty, o ile konsekwentnie rozwiąże obydwa równania w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$;

   2 punkty, o ile konsekwentnie rozwiąże dwa równania w **R** lub konsekwentnie rozwiąże jedno równanie w $\langle 0, \pi \rangle$;

   1 punkt, o ile konsekwentnie rozwiąże jedno równanie w **R**.

4. Jeżeli zdający wyznacza rozwiązania równań $\cos \alpha = 1$ oraz $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$, gdzie $\alpha = 3x$, w przedziale $\langle 0, 3\pi \rangle$ i na tym poprzestaje lub dalej popełnia błędy, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.

5. Jeżeli zdający przy wyznaczaniu rozwiązań równań $\cos 3x = 1$ oraz $\sin 3x = -\frac{1}{2}$ zapisuje poprawnie serię rozwiązań pierwszego z nich (z cos) oraz jedną serię rozwiązań drugiego (z sin), a następnie konsekwentnie wyznacza przynajmniej 4 rozwiązania równania z treści zadania w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.

Zadanie 12. (0−6)

III. Modelowanie matematyczne.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje wzory Viète’a (R3.1).

Przykładowe rozwiązanie

Równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste, gdy jego wyróżnik jest dodatni, czyli

$$\Delta = (m+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m^2 + 1) > 0$$

$$5m^2 + 2m - 3 > 0$$

$$m_1 = -1,\ m_2 = \frac{3}{5}.$$

Stąd $m \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{5}, +\infty\right)$

Warunek $x_1^3+x_2^3>-7x_1x_2$ możemy zapisać w postaci równoważnej

$$(x_1+x_2)\left(x_1^2-x_1x_2+x_2^2\right)>-7x_1x_2,$$

$$(x_1+x_2)\left((x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right)>-7x_1x_2.$$

Ze wzorów Viète'a na sumę i iloczyn pierwiastków trójmianu kwadratowego możemy tę nierówność zapisać w postaci:

$$\left(\frac{-b}{a}\right)\left(\left(\frac{-b}{a}\right)^2-3\frac{c}{a}\right)>-7\frac{c}{a}$$

$$-(m+1)\left(\left(-(m+1)\right)^2-3\left(-m^2+1\right)\right)>-7\left(-m^2+1\right)$$

$$-(m+1)^3+3(m+1)\left(-m^2+1\right)>-7\left(-m^2+1\right)$$

$$-(m+1)^3+3(m+1)\left(-m^2+1\right)+7\left(-m^2+1\right)>0$$

$$(m+1)\left(-(m+1)^2+3\left(-m^2+1\right)+7(-m+1)\right)>0$$

$$(m+1)\left(-m^2-2m-1-3m^2+3+7-7m\right)>0$$

$$(m+1)\left(-4m^2-9m+9\right)>0$$

$$m_1=-3 \text{ lub } m_2=\frac{3}{4} \text{ lub } m_3=-1.$$

$$m\in(-\infty,-3)\cup\left(-1,\frac{3}{4}\right).$$

Wyznaczamy część wspólną zbiorów $(-\infty,-1)\cup\left(\frac{3}{5},+\infty\right)$ i $(-\infty,-3)\cup\left(-1,\frac{3}{4}\right)$.

Odpowiedź $m\in(-\infty,-3)\cup\left(\frac{3}{5},\frac{3}{4}\right)$.

Schemat punktowania
Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta>0$:

$m\in(-\infty,-1)\cup\left(\frac{3}{5},+\infty\right)$

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.
Uwaga
Jeżeli zdający zapisze $\Delta\geq 0$, to za tę część otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na rozwiązaniu nierówności $x_1^3+x_2^3>-7x_1x_2$.
Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.
Podział punktów za drugi etap rozwiązania:
1 punkt zdający otrzymuje za zapisanie nierówności w postaci:

$(x_1+x_2)\left((x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right)>-7x_1x_2$

lub równoważnej.
2 punkty zdający otrzymuje za doprowadzenie do nierówności ze zmienną *m*, np.

$-(m+1)\left(\left(-(m+1)\right)^2-3\left(-m^2+1\right)\right)>-7\left(-m^2+1\right)$

3 punkty zdający otrzymuje za wyznaczenie miejsc zerowych wielomianu

$-(m+1)\left(\left(-(m+1)\right)^2-3\left(-m^2+1\right)\right)+7\left(-m^2+1\right)$,

czyli wielomianu $-4m^3-13m^2+9$: -3, -1, $\frac{3}{4}$

4 punkty zdający otrzymuje za rozwiązanie powyższej nierówności.

$m \in (-\infty, -3) \cup \left(-1, \frac{3}{4}\right)$

Trzeci etap polega na wyznaczeniu szukanej wartości parametru m z uwzględnieniem wszystkich warunków.

$m \in (-\infty, -3) \cup \left(\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right)$.

Uwagi

1. W przypadku otrzymania na jednym z etapów (I lub II) zbioru pustego lub zbioru R jako zbioru rozwiązań nierówności przyznajemy **0 punktów** za III etap.
2. W przypadku otrzymania w II etapie zbioru rozwiązań, będącego podzbiorem zbioru rozwiązań z I etapu lub otrzymania w I etapie zbioru rozwiązań, będącego podzbiorem zbioru rozwiązań z II etapu, przyznajemy **0 punktów** za III etap.
3. O ile nie zachodzą przypadki z uwag 1. i 2. i zdający poprawnie wykona etap I oraz popełnia błędy w rozwiązaniu nierówności z etapu II, albo gdy popełnia błędy w etapie I i otrzyma co najmniej 1 punkt za etap II, to za III etap może otrzymać **1 punkt**.
4. Jeżeli zdający w II etapie rozwiązania stosuje nieistniejącą zależność: „suma sześcianów = sześcian sumy", prowadzącą do uproszczenia badanego problemu, lub zdający stosuje inny błędny wzór, prowadzący do uproszczenia badanego problemu, ale otrzyma nierówność wielomianową stopnia trzeciego, uzyska trzy miejsca zerowe i poprawnie rozwiązuje otrzymaną nierówność, to za II etap otrzymuje **1 punkt** (za rozwiązanie nierówności).
5. Jeżeli zdający w II etapie rozwiązania otrzyma poprawną nierówność wielomianową stopnia 3. i popełnia błędy rachunkowe w jej rozwiązaniu, to może otrzymać **3 punkty** za II etap, o ile wyznaczy 3 różne miejsca zerowe wielomianu z tej nierówności i konsekwentnie rozwiąże nierówność do końca, zaś w każdym innym przypadku otrzymuje **2 punkty** za ten etap.
6. Jeżeli zdający w II etapie rozwiązania rozważa nierówność wielomianową stopnia większego niż 3. lub niepoprawną nierówność stopnia 3. i wyznacza miejsca zerowe w liczbie właściwej dla stopnia wielomianu i otrzymuje przynajmniej 3 miejsca zerowe, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty** za II etap, o ile konsekwentnie rozwiąże nierówność. Jeżeli wielomian w tej nierówności nie ma trzech różnych miejsc zerowych, to zdający może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za ten etap.
7. Jeżeli zdający przy rozwiązywaniu otrzymanej w II etapie nierówności stopnia co najmniej 3. popełnia błąd, polegający na niepoprawnym grupowaniu wyrazów, np. z nierówności $-4m^3 - 13m^2 + 9 > 0$ uzyska $(4m+13)(m^2-9) > 0$, to nie otrzymuje punktów za części II.3 i II.4.

Zadanie 13. (0−4)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (5.4).

Przykładowe rozwiązanie

Niech a_1 będzie pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego, zaś q jego ilorazem.
Z treści zadania otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a_1q^2 + a_1q^5 = -84 \\ a_1q^3 + a_1q^6 = 168 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1q^2\left(1+q^3\right) = -84 \\ a_1q^3\left(1+q^3\right) = 168 \end{cases}$$

Dzieląc stronami te równania, co możemy zrobić, gdyż gdyby którakolwiek z liczb a_1, q, $1+q^3$ była równa 0, to otrzymalibyśmy sprzeczność, otrzymujemy

$$q = -2 .$$

Zatem

$$a_1\left(-2\right)^2\left(1+\left(-2\right)^3\right) = -84 ,$$

$$-28 \cdot a_1 = -84 ,$$

$$a_1 = 3 .$$

Otrzymaliśmy ciąg geometryczny $\left(a_n\right)$, w którym:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ q = -2 \end{cases}$$

Wykorzystując wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, doprowadzamy do równania postaci

$$\frac{3\left(\left(-2\right)^n - 1\right)}{-2-1} = 32769 .$$

Przekształcając to równanie, otrzymujemy $\left(-2\right)^n = -32768$. Ponieważ $\left(-2\right)^n = \left(-2\right)^{15}$, więc $n = 15$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania . ... 1 p.
Zdający zapisze

- układ równań z dwiema niewiadomymi, np.: $\begin{cases} a_1q^2 + a_1q^5 = -84 \\ a_1q^3 + a_1q^6 = 168 \end{cases}$

albo

- układ równań z niewiadomymi q, a_3, a_6, np.: $\begin{cases} a_3 + a_6 = -84 \\ q\left(a_3 + a_6\right) = 168 \end{cases}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 p.**
Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą a_1 lub q
i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności ....**3 p.**
Zdający rozwiąże układ równań: $\begin{cases} a_1 = 3 \\ q = -2 \end{cases}$.

Rozwiązanie pełne .... **4 p.**
Zdający wyznaczy szukaną liczbę n: $n = 15$.

Uwagi

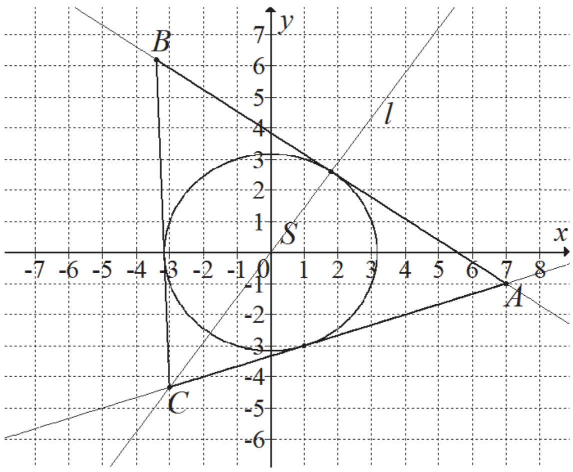
1. Jeżeli zdający przedstawi poprawną strategię poszukiwania liczby n, ale otrzyma błędne wartości a_1 lub q, takie że po podstawieniu do wzoru na S_n otrzymuje równanie, którego rozwiązanie nie jest liczbą naturalną, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**, za realizację rozwiązania do etapu: istotny postęp.
2. Jeżeli zdający zapisze $q = -2$ bez rozwiązania układu lub stosownego uzasadnienia, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający korzysta przy wyznaczaniu n z zapisanej przez siebie zależności "$-(-2)^n = 2^n$" bez stosownego komentarza, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.

Zadanie 14. (0−6)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności, wyznacza współrzędne środka odcinka, wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt, oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych, wyznacza punkty wspólne prostej i okręgu oraz oblicza odległość punktu od prostej (R8.5, 8.5, 8.3, 8.4, R8.6, R8.4).

Przykładowe rozwiązania

I sposób − analitycznie − styczne AC i AB



Proste AC i AB przechodzą przez punkt $A=(7,-1)$, żadna z nich nie jest prostopadła do osi Ox układu współrzędnych, więc mają równania postaci

$$y=a(x-7)-1,$$

$$ax-y-7a-1=0.$$

Obie te proste są styczne do okręgu, zatem ich odległości od środka okręgu są równe promieniowi okręgu. Stąd otrzymujemy równanie

$$\frac{|-7a-1|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{10},$$

$$(-7a-1)^2=10(a^2+1),$$

$$49a^2+14a+1=10a^2+10$$

$$39a^2+14a-9=0$$

$$a=\frac{-14-40}{78}=-\frac{9}{13} \quad \text{lub} \quad a=\frac{-14+40}{78}=\frac{1}{3}.$$

Szukane styczne mają więc równania: $y=-\frac{9}{13}x+\frac{50}{13}$, $y=\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}$. Tylko druga z tych prostych przechodzi przez trzecią ćwiartkę układu współrzędnych, więc prosta AC ma równanie $y=\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}$, a prosta AB ma równanie $y=-\frac{9}{13}x+\frac{50}{13}$.

Trójkąt ABC jest równoramienny, a jego ramionami są boki AC i BC. Zatem wierzchołek C leży na przecięciu prostej AC i symetralnej l boku AB. Prosta l jest prostopadła do prostej AB i przechodzi przez punkt $S=(0,0)$. Zatem współczynnik kierunkowy prostej l jest równy $a_l=\frac{13}{9}$. Stąd l ma równanie postaci

$$y=\frac{13}{9}x.$$

Współrzędne wierzchołka C obliczymy, rozwiązując układ równań

$$y=\frac{1}{3}x-\frac{10}{3} \text{ i } y=\frac{13}{9}x.$$

Stąd otrzymujemy równanie

$$\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}=\frac{13}{9}x,$$

$$\frac{10}{9}x=-\frac{30}{9}$$

$$x=-3,$$

więc $y=\frac{13}{9}\cdot(-3)=-\frac{13}{3}$, czyli $C=\left(-3,-\frac{13}{3}\right)$.

Obliczamy współrzędne punktu D styczności prostej AB z danym okręgiem. Jest to punkt przecięcia prostej l z prostą AB. Wystarczy więc rozwiązać układ równań

$$y=-\frac{9}{13}x+\frac{50}{13} \text{ i } y=\frac{13}{9}x.$$

Stąd otrzymujemy równanie

$$-\frac{9}{13}x+\frac{50}{13}=\frac{13}{9}x,$$

$$\frac{250}{117}x=\frac{50}{13}$$

$$x=\frac{9}{5},$$

więc $y=\frac{13}{9}\cdot\frac{9}{5}=\frac{13}{5}$, czyli $D=\left(\frac{9}{5},\frac{13}{5}\right)$.

Punkt D jest środkiem odcinka AB, więc

$$D=\left(\frac{7+x_B}{2},\frac{-1+y_B}{2}\right).$$

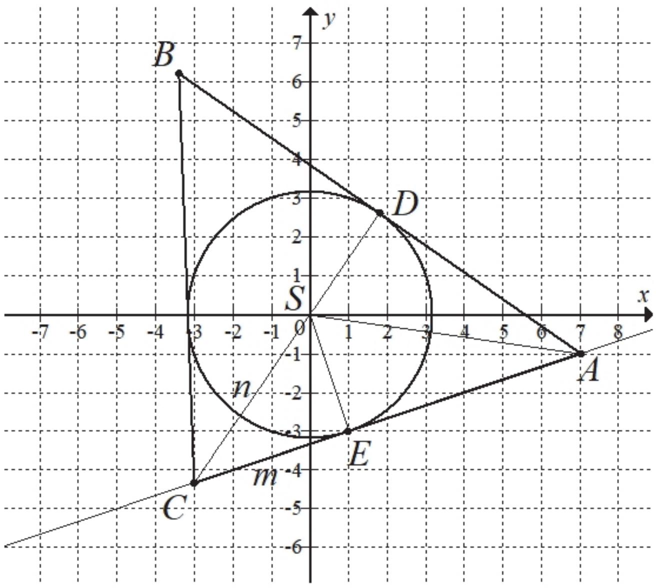
Zatem

$$\frac{7+x_B}{2}=\frac{9}{5} \text{ i } \frac{-1+y_B}{2}=\frac{13}{5},$$

$$x_B=-\frac{17}{5} \text{ i } y_B=\frac{31}{5}.$$

Zatem $B=\left(-\frac{17}{5},\frac{31}{5}\right)$.

II sposób − syntetycznie – długości odcinków *CE* i *CS*



Promień okręgu jest równy $r=\sqrt{10}$. Długość odcinka *SA* jest równa

$$|SA|=\sqrt{7^2+(-1)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}\,.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *ASE* otrzymujemy

$$|SA|^2=|SE|^2+|EA|^2\,,$$

$$50=10+EA^2\,,$$

$$|EA|^2=40\,,$$

$$|EA|=\sqrt{40}=2\sqrt{10}\,.$$

Z twierdzenia o odcinkach stycznych otrzymujemy $|DA|=|EA|=2\sqrt{10}$.

Trójkąty *CES* i *CDA* są podobne, gdyż oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku *C*. Stąd wynika

$$\frac{|CE|}{|SE|}=\frac{|CD|}{|DA|}\ \text{ oraz }\ \frac{|CS|}{|SE|}=\frac{|CA|}{|DA|}\,,$$

$$\frac{m}{\sqrt{10}}=\frac{n+\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}\ \text{ oraz }\ \frac{n}{\sqrt{10}}=\frac{m+2\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}\,,$$

$$2m=n+\sqrt{10}\ \text{ oraz }\ 2n=m+\sqrt{10}\,,$$

$$n=2m-\sqrt{10}\ \text{ oraz }\ 2\left(2m-\sqrt{10}\right)=m+\sqrt{10}\,.$$

Stąd

$$4m-2\sqrt{10}=m+\sqrt{10}\,,$$

$$m=\tfrac{4}{3}\sqrt{10}\,,\ \text{więc}\ n=2\cdot\tfrac{4}{3}\sqrt{10}-\sqrt{10}=\tfrac{5}{3}\sqrt{10}\,.$$

Uwaga

Długości *m* i *n* możemy też obliczyć korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów *ACD* i *CSE*. Otrzymujemy wtedy

$$|CA|^2=|CD|^2+|DA|^2\ \text{ oraz }\ |CS|^2=|CE|^2+|SE|^2\,,$$

$$\left(m+2\sqrt{10}\right)^2=\left(n+\sqrt{10}\right)^2+\left(2\sqrt{10}\right)^2 \text{ oraz } n^2=m^2+\left(\sqrt{10}\right)^2,$$

$$m^2+4m\sqrt{10}+40=n^2+2n\sqrt{10}+10+40 \text{ oraz } n^2=m^2+10,$$

$$4m\sqrt{10}=2n\sqrt{10}+20 \text{ oraz } n^2=m^2+10,$$

$$2m-\sqrt{10}=n \text{ oraz } \left(2m-\sqrt{10}\right)^2=m^2+10,$$

$$2m-\sqrt{10}=n \text{ oraz } 4m^2-4m\sqrt{10}+10=m^2+10,$$

$$2m-\sqrt{10}=n \text{ oraz } m=\tfrac{4}{3}\sqrt{10},$$

$$n=\tfrac{5}{3}\sqrt{10} \text{ oraz } m=\tfrac{4}{3}\sqrt{10}.$$

Zatem długość ramienia AC trójkąta ABC jest równa

$$|AC|=|CE|+|EA|=m+2\sqrt{10}=\tfrac{4}{3}\sqrt{10}+2\sqrt{10}=\tfrac{10}{3}\sqrt{10}.$$

Niech $C=(x,y)$. Ponieważ $|AC|=\frac{10}{3}\sqrt{10}$ i $|CS|=\frac{5}{3}\sqrt{10}$, więc

$$|AC|^2=\tfrac{1000}{9} \text{ i } |CS|^2=\tfrac{250}{9},$$

$$(x-7)^2+(y+1)^2=\tfrac{1000}{9} \text{ i } x^2+y^2=\tfrac{250}{9}.$$

Pierwsze równanie możemy zapisać w postaci

$$x^2+y^2-14x+2y+50=\tfrac{1000}{9}.$$

Stąd i z drugiego równania otrzymujemy

$$\tfrac{250}{9}-14x+2y+50=\tfrac{1000}{9},$$

$$7x-y+\tfrac{50}{3}=0,$$

$$y=7x+\tfrac{150}{9}.$$

Stąd i z pierwszego równania mamy

$$x^2+\left(7x+\tfrac{50}{3}\right)^2=\tfrac{250}{9},$$

$$x^2+49x^2+\tfrac{700}{3}x+\tfrac{2500}{9}-\tfrac{250}{9}=0,$$

$$50x^2+\tfrac{700}{3}x+\tfrac{2250}{9}=0,$$

$$x^2+\tfrac{14}{3}x+5=0,$$

$$3x^2+14x+15=0,$$

$$3x^2+9x+5x+15=0,$$

$$3x(x+3)x+5(x+3)=0,$$

$$(x+3)(3x+5)=0,$$

$$x=-3 \text{ lub } x=-\tfrac{5}{3}.$$

Gdy $x=-3$, to $y=7\cdot(-3)+\frac{50}{3}=-\frac{13}{3}$, a gdy $x=-\frac{5}{3}$, to $y=7\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)+\frac{50}{3}=5$.

Ponieważ obie współrzędne punktu C są ujemne, więc $C=\left(-3,-\frac{13}{3}\right)$.

Niech $B=(x,y)$. Ponieważ $|BC|=|AC|=\frac{10}{3}\sqrt{10}$ i $|AB|=2\cdot 2\sqrt{10}=4\sqrt{10}$, więc

$$|BC|^2=\frac{1000}{9} \text{ i } |AB|^2=160,$$

$$(-3-x)^2+\left(-\frac{13}{3}-y\right)^2=\frac{1000}{9} \text{ i } (x-7)^2+(y+1)^2=160,$$

$$x^2+y^2+6x+\frac{26}{3}y-\frac{250}{3}=0 \text{ i } x^2+y^2-14x+2y-110=0.$$

Stąd

$$x+\frac{1}{3}y+\frac{4}{3}=0 \text{ i } x^2+y^2-14x+2y-110=0,$$

$$y=-3x-4 \text{ i } x^2+(-3x-4)^2-14x+2(-3x-4)-110=0.$$

Drugie równanie możemy zapisać w postaci

$$10x^2+4x-102=0,$$

$$5x^2+2x-51=0,$$

$$\Delta=2^2-4\cdot5\cdot(-51)=1024,\ \sqrt{\Delta}=32,$$

$$x=\frac{-2-32}{10}=-\frac{17}{5} \text{ lub } x=\frac{-2+32}{10}=3,$$

Gdy $x=-\frac{17}{5}$, to $y=-3\cdot\left(-\frac{17}{5}\right)-4=\frac{31}{5}$, a gdy $x=3$, to $y=-3\cdot3-4=-13$.

Ponieważ punkt B nie leży w czwartej ćwiartce układu współrzędnych, więc $B=\left(-\frac{17}{5},\frac{31}{5}\right)$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający:

a) obliczy długości odcinków stycznych poprowadzonych z punktu A: $|AD|=|AE|=2\sqrt{10}$

albo

b) obliczy współrzędne środka M odcinka AS oraz długość odcinka AS, gdzie $S=(0,0)$: $M=\left(\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $|AS|=5\sqrt{2}$,

albo

c) obliczy sinus kąta SAE: $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

albo

d) zapisze równanie pęku prostych przechodzących przez punkt A: $y=ax-7a-1$,

albo

e) zapisze, że trójkąt ADC jest podobny do trójkąta SEC,

f) obliczy długość tylko jednego z odcinków AD lub AE: $|AD|=|AE|=2\sqrt{10}$ oraz zapisze tę długość w zależności od współrzędnych punktu D (lub E) lub obliczy tangens kąta SAE lub SAD: $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{1}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym istotny postęp .... 2 p.

Zdający:

A) obliczy $|AD| = 2\sqrt{10}$ oraz zapisze układ równań $\begin{cases}(x-7)^2+(y+1)^2=40\\ x^2+y^2=10\end{cases}$

albo

B) obliczy $|AD| = |AE| = 2\sqrt{10}$ oraz zapisze układ równań z niewiadomymi $m=|CE|$ i $n=|CS|$:

- $\frac{m}{\sqrt{10}} = \frac{n+\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}$ i $\frac{n}{\sqrt{10}} = \frac{m+\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}$
- $\left(m+2\sqrt{10}\right)^2 = \left(n+\sqrt{10}\right)^2 + \left(2\sqrt{10}\right)^2$ i $n^2 = m^2 + \left(\sqrt{10}\right)^2$

albo

C) obliczy $|AD| = 2\sqrt{10}$, obliczy tangens kąta SAE: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ oraz obliczy współczynnik kierunkowy prostej AS $\left(a_{AS} = -\frac{1}{7}\right)$

albo

D) obliczy współrzędne środka $M = \left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, długość odcinka $|AS| = 5\sqrt{2}$ oraz zapisze układ równań $\begin{cases}\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{2}\\ x^2+y^2=10\end{cases}$

albo

E) obliczy sinus kąta SAE: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, tangens tego kąta: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ oraz współczynnik kierunkowy prostej AS $\left(a_{AS} = -\frac{1}{7}\right)$

albo

F) zapisze równanie pęku prostych przechodzących przez punkt A: $y = ax - 7a - 1$ oraz równanie z niewiadomą a: $\frac{|-7a-1|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{10}$

albo

G) zapisze równanie pęku prostych przechodzących przez punkt A: $y = ax - 7a - 1$ oraz układu równań $x^2 + y^2 = 10$ i $y = ax - 7a - 1$ wraz z warunkiem istnienia jednego rozwiązania tego układu

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający:

I obliczy współrzędne punktów styczności D i E: $D = \left(\frac{9}{5}, \frac{13}{5}\right)$, $E = (1, -3)$

albo

II zapisze równania prostych AC i AB: $y = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$, $y = -\frac{9}{13}x + \frac{50}{13}$

albo

III obliczy długości odcinków CE i CS: $m = |CE| = \frac{4}{3}\sqrt{10}$, $n = |CS| = \frac{4}{3}\sqrt{10}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... **4 p.**

Zdający

- obliczy współrzędne wierzchołka B: $B=\left(-\frac{17}{5},\frac{31}{5}\right)$

albo

- obliczy współrzędne wierzchołka C: $C=\left(-3,-\frac{13}{3}\right)$

Uwaga

Jeżeli zdający

- obliczy współrzędne wierzchołka B: $B=\left(-\frac{17}{5},\frac{31}{5}\right)$ oraz zapisze układ równań z niewiadomymi x, y – współrzędnymi wierzchołka C, np.: $x-3y-10=0$ i $13x-9y=0$

albo

- obliczy współrzędne wierzchołka C: $C=\left(-3,-\frac{13}{3}\right)$ oraz zapisze układ równań z niewiadomymi x, y – współrzędnymi wierzchołka B, np.: $\frac{x+7}{2}=\frac{9}{5}$ i $\frac{y-1}{2}=\frac{13}{5}$

albo

- obliczy współrzędne obu wierzchołków B i C, popełniając w trakcie rozwiązania błędy rachunkowe

to otrzymuje **5 punktów**.

Rozwiązanie pełne .... **6 p.**

Zdający obliczy współrzędne wierzchołków B i C: $B=\left(-\frac{17}{5},\frac{31}{5}\right)$, $C=\left(-3,-\frac{13}{3}\right)$.

Uwagi

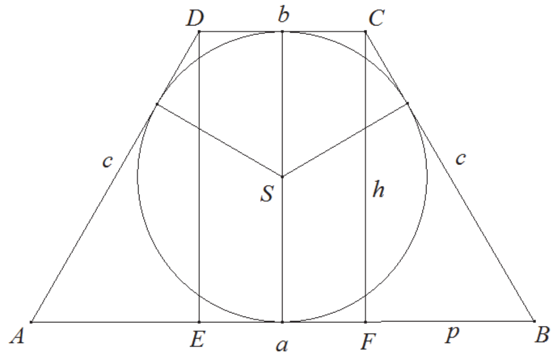
1. Jeżeli zdający pominie informację o ujemnych współrzędnych punktu C i tym samym zamieni miejscami proste AC i AB, to może otrzymać **5 punktów** za całe rozwiązanie, o ile nie popełni innych błędów.
2. Jeżeli zdający błędnie przyjmuje, że podstawą trójkąta jest inny bok niż AB, to może otrzymać co najwyżej **5 punktów**.
3. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **5 punktów**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozwiązania zadania na żadnym etapie.
4. Jeżeli zdający zapisze dwa równania z dwiema niewiadomymi, którymi są współrzędne punktu B lub C, to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający odczytuje z rysunku współrzędne punktu E, a następnie wyznacza równanie stycznej AE i na tym poprzestaje, to może otrzymać **1 punkt**.

Zadanie 15. (0−7)

III. Modelowanie matematyczne.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów. (R7.5). 11. Rachunek różniczkowy. Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych (R11.6).

Przykładowe rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Wyznaczmy dziedzinę funkcji L. Z warunków zadania wynika, że $a > h$, więc $a > 2-a$. Stąd $a > 1$. Jeśli $a = 1$, to czworokąt jest kwadratem. Ponadto $a < 2$. Jeśli $a = 2$, to $h = 0$ i zamiast trapezu mamy do czynienia z odcinkiem o długości 2.

Rozważany trapez istnieje jedynie dla $a \in (1,2)$.

Z warunków zadania otrzymujemy

$$a + h = 2, \text{ skąd } h = 2 - a.$$

Ponieważ w trapez można wpisać okrąg, więc

$$a + b = 2c.$$

Obwód L trapezu jest więc równy

$$L = a + b + 2c = 2(a+b).$$

Trapez jest równoramienny, więc odcinki AE i FB mają tę samą długość równą

$$p = \frac{a-b}{2}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BCF otrzymujemy

$$p^2 + h^2 = c^2,$$

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

$$\frac{a^2}{4} - \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{4} + h^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{4},$$

$$h^2 = ab,$$

$$(2-a)^2 = ab,$$

$$b=\frac{(2-a)^2}{a}=\frac{a^2-4a+4}{a}.$$

Zatem

$$L=a+b+2c=2(a+b)=2\left(a+\frac{a^2-4a+4}{a}\right)=2\cdot\frac{2a^2-4a+4}{a},$$

czyli

$$L(a)=\frac{4a^2-8a+8}{a} \text{ dla } a\in(1,2).$$

Pochodna funkcji L jest równa

$$L'(a)=\frac{(8a-8)\cdot a-(4a^2-8a+8)\cdot 1}{a^2}=\frac{4a^2-8}{a^2}=\frac{4\left(a-\sqrt{2}\right)\left(a+\sqrt{2}\right)}{a^2} \text{ dla } a\in(1,2).$$

Ponieważ dla każdego $a\in(1,2)$ prawdziwa jest nierówność $\frac{4\left(a+\sqrt{2}\right)}{a^2}>0$, więc

$L'(a)=0 \Leftrightarrow a-\sqrt{2}=0 \wedge a\in(1,2) \Leftrightarrow a=\sqrt{2}$,

$L'(a)>0 \Leftrightarrow a-\sqrt{2}>0 \wedge a\in(1,2) \Leftrightarrow a\in\left(\sqrt{2},2\right)$,

$L'(a)<0 \Leftrightarrow a-\sqrt{2}<0 \wedge a\in(1,2) \Leftrightarrow a\in\left(1,\sqrt{2}\right)$.

Oznacza to, że w przedziale $\left(1,\sqrt{2}\right\rangle$ funkcja L jest malejąca, w przedziale $\left\langle\sqrt{2},2\right)$ jest rosnąca, a w punkcie $a=\sqrt{2}$ osiąga minimum lokalne, które jest zarazem jej najmniejszą wartością.

Tangens kąta ostrego trapezu o najmniejszym obwodzie jest równy

$$\operatorname{tg}\sphericalangle ABC=\frac{h}{p}=\frac{2-a}{\frac{a-b}{2}}=\frac{2(2-a)}{a-\frac{a^2-4a+4}{a}}=\frac{a(a-2)}{2(1-a)},$$

więc dla $a=\sqrt{2}$ wartość tangensa jest równa

$$\operatorname{tg}\sphericalangle ABC=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-2\right)}{2\left(1-\sqrt{2}\right)}=\frac{2-2\sqrt{2}}{2-2\sqrt{2}}=1,$$

co oznacza, że $\sphericalangle ABC=45^\circ$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów. Ocenianie II etapu jest niezależne od wyniku uzyskanego za I etap.

I. Pierwszy etap, który oceniamy na **3 punkty**, składa się z trzech części:

I.1) wyznaczenie wszystkich wartości *a*, dla których istnieje trapez o podanych własnościach, czyli dziedziny funkcji *L*: $D_L=(1,2)$

(Za wyznaczenie dziedziny uznaje się też zapisanie dwóch nierówności: $2-a>0$, $a>2-a$).

I.2) zapisanie poprawnej zależności między wielkościami *a* i *b*, np.:

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+(2-a)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \text{ lub } b=\frac{a^2-4a+4}{a}$$

I.3) wykazanie, że obwód L trapezu, jako funkcja zmiennej a, wyraża się wzorem:

$$L(a)=\frac{4a^2-8a+8}{a}$$

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

II. Drugi etap (**3 punkty**) składa się z trzech części:

II.1) wyznaczenie pochodnej funkcji $f(a)=\frac{4a^2-8a+8}{a}$:

$$f'(a)=\frac{(8a-8)\cdot a-\left(4a^2-8a+8\right)\cdot 1}{a^2} \text{ lub } f'(a)=\frac{4a^2-8}{a^2}$$

II.2) obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji f: $a=-\sqrt{2}$ lub $a=\sqrt{2}$

II.3) uzasadnienie (np. badanie monotoniczności funkcji), że funkcja L posiada wartość najmniejszą dla $a=\sqrt{2}$.

III. Trzeci etap (**1 punkt**) – obliczenie tangensa kąta ostrego trapezu o najmniejszym polu: $\mathrm{tg}\sphericalangle ABC=1$.

Uwagi

1. Za poprawne uzasadnienie, że funkcja L posiada wartość najmniejszą dla wyznaczonej wartości a, przy której pochodna się zeruje można uznać sytuacje, gdy zdający:

- opisuje, słownie lub graficznie (np. przy użyciu strzałek), monotoniczność funkcji L;

- zapisuje, że dla wyznaczonej wartości a funkcja L ma minimum lokalne i jest to jednocześnie jej najmniejsza wartość.

Jeżeli zdający nie przedstawi takiego uzasadnienia, to za II etap może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

2. Jeżeli zdający przyjmuje, że dziedziną funkcji L jest przedział $(0,+\infty)$ lub nie wyznaczy tej dziedziny, to **nie otrzymuje punktów** za realizację części II.3.

3. Jeżeli zdający przyjmuje, że dziedziną funkcji L jest przedział $(0,2)$ lub zapisze warunki: $2-a>0$ i $a>0$, to może otrzymać **1 punkt** za realizację części II.3., o ile uzasadni istnienie najmniejszej wartości funkcji.

4. Jeżeli zdający przyjmuje, że dziedziną funkcji L jest przedział $(1,+\infty)$ lub zapisze warunki: $a>h$ i $h>0$, lub zapisze warunek $a>2-a$, to może otrzymać **1 punkt** za realizację części II.3., o ile uzasadni istnienie najmniejszej wartości funkcji.

5. Jeżeli zdający przyjmuje, że dziedziną funkcji L jest przedział $\langle 1,2)$, to za realizację etapu I.1 otrzymuje **1 punkt**.

6. Jeżeli zdający w wyniku błędów nie wyznaczy poprawnie długości dłuższej podstawy trapezu o najmniejszym obwodzie, ale dla wyznaczonej wartości a obliczy tangens kąta ostrego trapezu, to może otrzymać **1 punkt** za III etap.

7. Jeżeli zdający bada inną funkcję zmiennej a niż postaci $g(a)=k\cdot\frac{4a^2-8a+8}{a}$, gdzie $k\neq 0$, to nie otrzymuje punktów za II i III etap rozwiązania.

8. Jeżeli z zapisu rozwiązania wynika, że zdający stosuje poprawny wzór na pochodną ilorazu funkcji i dalej popełnia błędy, ale otrzymana w rozwiązaniu pochodna ma dwa różne miejsca zerowe, to zdający może otrzymać w II etapie punkty za konsekwentną realizację części II.2)

i II.3). Jeżeli z zapisu rozwiązania nie wynika, że zdający stosuje poprawny wzór na pochodną ilorazu funkcji i zdający popełnia błędy przy obliczaniu pochodnej, ale otrzymuje wzór na pochodną, w którym w liczniku jest wielomian stopnia 2, a w mianowniku a^2, to może w II etapie otrzymać jedynie punkt za konsekwentną realizację części II.3.